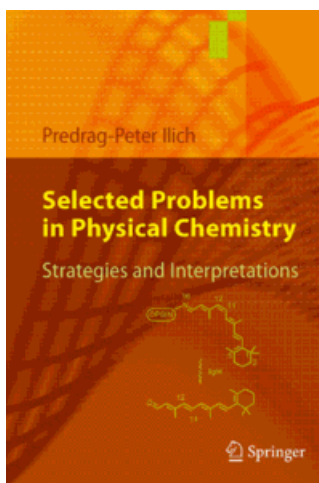




Due esempi tratti dal libro

Selected Problems in Physical Chemistry: Strategies and Interpretations - Predrag-Peter Ilich

Publisher: Springer | 2010 | ISBN: 3642043267

La mongolfiera



La mongolfiera galleggia nell'aria sfruttando il principio di Archimede secondo cui un corpo riceve una spinta dal basso verso l'alto pari alla massa del fluido che esso occupa. Con i bruciatori spenti una mongolfiera con tutta la sua struttura (la gondola, la bombola, i bruciatori, il pallone di nylon rivestito di materiale ignifugo etc. etc.), equipaggio e passeggeri arriva ad assumere una massa pari a quasi 700 kg (per il nostro esercizio ipotizziamo che tale massa sia esattamente 678 kg).

Il meccanismo di funzionamento di una mongolfiera può essere descritto, in modo molto qualitativo, come qui di seguito indicato. La spinta di Archimede rimane costante perchè il volume complessivo del nostro sistema rimane costante. Quando l'aria dentro il pallone viene scaldata, essa diventa meno densa e leggera a causa della fuoriuscita di materia; ciò riduce la massa complessiva della mongolfiera e, nel momento in cui la forza peso diminuirà fino ad uguagliare la spinta di Archimede, comincerà il fenomeno del galleggiamento.

Per il nostro esercizio considereremo il pallone come una perfetta sfera di raggio r pari a 9 metri (nella realtà la forma del pallone è leggermente diversa da quella supposta). La domanda cui cercheremo di dare risposta è la seguente: quale dovrebbe essere la temperatura media dell'aria dentro il pallone affinché la mongolfiera possa volare?

Si tenga presente che il pallone è aperto, pertanto la pressione dell'aria al suo interno tende ad uguagliare quella esterna.

----- INTERMEZZO -----

Densità e massa di un gas attraverso l'equazione di stato dei gas ideali.

La massa di un certo volume di aria secca al livello del mare si può ricavare utilizzando l'equazione di stato dei gas ideali (consideriamo l'aria come una miscela di gas a comportamento ideale).

$$P \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

$$P \cdot V = \frac{m}{PM_{aria}} R \cdot T$$

$$m = \frac{P \cdot V \cdot PM_{aria}}{R \cdot T}$$

Il **Peso Molecolare medio dell'aria** si può ricavare, con buona approssimazione, considerando l'aria secca costituita da azoto, ossigeno e argon nelle seguenti proporzioni:

$$79\% \text{ N}_2 + 20\% \text{ O}_2 + 1\% \text{ Ar}$$

$$0.79 \times 28 + 0.20 \times 32 + 0.01 \times 40 = 28.92 \approx 29 \text{ g mol}^{-1} \text{ (u.m.a.)}$$

Calcoli più precisi (**N₂** 78.09%; **O₂** 20.95%; **Ar** 0.0933%; **CO₂** 0.03%) portano ad un valore di 28.97 g mol⁻¹.

Essendo 1 m³ = 1000 dm³, la massa specifica dell'aria espressa in g/m³ (massa di un metro cubo), sarà:

$$m_{spec.} = d = \frac{1 \text{ atm} \cdot 1000 \text{ dm}^3 \cdot 29 \text{ g mol}^{-1}}{0.08206 \text{ dm}^3 \text{ atm K}^{-1} \text{ mol}^{-1} \cdot 298.15 \text{ K}} = 1185 \text{ g/m}^3$$

oppure, in modo equivalente, utilizzando le unità internazionali:

$$m_{spec.} = d = \frac{101325 \text{ Pa} \cdot 1 \text{ m}^3 \cdot 29 \text{ g mol}^{-1}}{8.314 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1} \cdot 298.15 \text{ K}} = 1185 \text{ g/m}^3$$

NOTA: essendo 1 Pa = 1 N × 1 m⁻² e 1 J = 1 N × 1 m sarà $\frac{N \text{ m}^{-2} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{g mol}^{-1}}{N \text{ m K}^{-1} \text{ mol}^{-1} \cdot K} = g$

----- FINE INTERMEZZO -----

Torniamo alla nostra mongolfiera. Il volume di aria contenuto nel pallone considerato sferico sarà dato da:

$$V_i = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = 3053.6 \text{ m}^3 \approx 3054 \text{ m}^3$$

Con i bruciatori non ancora in funzione la temperatura dell'aria contenuta nel pallone corrisponderà a quella dell'ambiente, mentre la pressione, visto che il

pallone è aperto, sarà sempre quella dell'atmosfera esterna. In queste condizioni iniziali, la massa m_{int}^0 di aria all'interno del pallone sarà :

$$m_{\text{int}}^0 = \frac{P \cdot V_i \cdot PM_{\text{aria}}}{R \cdot T} = \frac{101325 \cdot 3054 \cdot 29}{8.314 \cdot 283.15} = 3812036 \text{ g} = 3812 \text{ kg}$$

La mongolfiera prenderà a galleggiare quando la massa di aria interna al pallone diminuirà del peso complessivo della struttura (materiali e passeggeri) e assumerà il valore:

$$m_{\text{int}}^{\text{eq}} = m_{\text{int}}^0 - m_{\text{struttura}} = 3812 - 678 = 3134 \text{ kg}$$

Questo significa che dovranno fuoriuscire dal pallone tante moli di aria in modo che quelle rimanenti all'interno siano corrispondenti alla massa trovata:

$$n_{\text{moli int.}} = \frac{\text{massa(g)}}{PM_{\text{aria}}} = \frac{3.134 \cdot 10^6}{29} = 1.081 \cdot 10^5 \text{ mol}$$

Per ottenere questo è necessario scaldare alla temperatura:

$$T = \frac{P \cdot V_i}{n_{\text{moli int.}} \cdot R} = \frac{101325 \text{ Pa} \cdot 3054 \text{ m}^3}{1.081 \cdot 10^5 \cdot 8.314} = 344.31 \text{ K} = 71.16 \text{ }^\circ\text{C}$$

Gli ultimi due passaggi potevano essere ridotti ad uno solo:

$$T = \frac{P \cdot V_i \cdot PM_{\text{aria}}}{m_{\text{int}}^{\text{eq}} \cdot R} = \frac{101325 \text{ Pa} \cdot 3054 \text{ m}^3 \cdot 29}{3.134 \cdot 10^6 \cdot 8.314} = 344.31 \text{ K} = 71.16 \text{ }^\circ\text{C}$$

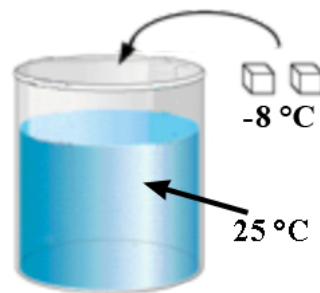
RIEPILOGO: Scaldando l'aria interna al pallone, le molecole interne aumenteranno la loro energia cinetica media. Questo produrrebbe un aumento della pressione se non potessero diminuire il numero di molecole. Per il fatto che il pallone è aperto, quello che accade è la fuoriuscita di molecole “calde” affinché la pressione interna si mantenga pari a quella esterna al pallone. Questo evento produce una diminuzione della massa (e peso) e della densità del gas interno al pallone mentre la spinta di Archimede, dipendendo dal volume, rimane costante. Quando la densità si riduce a tal punto che la spinta verso l'alto supera il peso del sistema “mongolfiera + passeggeri”, la mongolfiera comincerà il suo volo.

ESERCITAZIONE

Svolgete lo stesso esercizio in una stagione differente: la primavera. In pratica dovete considerare la temperatura esterna pari a 20.0 °C. (R. $\approx$ 86.12 °C)

Raffreddiamo una bibita.

Immaginate di aprire una bibita da 12 once (340.2 g) inizialmente a temperatura ambiente (25°C) e di decidere di raffreddarla mediante due cubetti di ghiaccio. Assumete che la bibita sia costituita fondamentalmente da acqua e supponete che i due cubetti di ghiaccio, di lato di un pollice (2.54 cm), abbiano una temperatura di -8°C. In queste condizioni, trascurando le perdite di calore, determinate la temperatura minima assunta dal sistema quando tutto il ghiaccio si è sciolto e la miscela, adeguatamente mescolata, presenta una temperatura uniforme.



Per risolvere il problema sono necessari alcuni dati aggiuntivi o particolari valori di conversione qui di seguito riportati

densità del ghiaccio = 0°C: 0.9162, -5°C: 0.9175, -10°C: 0.9189 g/cm³

densità ghiaccio interpolata a -8 °C = 0.9183 g/cm³ (fate una prova)

C_pghiaccio = 0°C: 2.050, -5°C: 2.027, -10°C: 2.00 kJ kg⁻¹ K⁻¹

C_pghiaccio media = 2.03 kJ kg⁻¹ K⁻¹ (J g⁻¹ K⁻¹) = 0.486 cal g⁻¹ K⁻¹

ΔH_{fusione} ghiaccio = 1436 cal mol⁻¹

Parte preliminare: Conversione dei dati

Bibita:

Massa di acqua (bibita) = 12 oz × 28.35 = 340.2 g

Moli di acqua (bibita) = massa in grammi / PM = 340.2 / 18 = 18.9 mol

Cubetti di ghiaccio:

Massa di acqua solida (ghiaccio) = volume × densità = 2 × 2.54³ × 0.9183 = 30.1 g

Moli di acqua solida (ghiaccio) = massa(g) / PM = 30.1 / 18 = 1.67 mol

Parte 1: Trasferimento calore dalla bibita ai cubetti di ghiaccio

(ovvero riscaldamento del ghiaccio fino alla temperatura di fusione: 0 °C)

$$q_{acq. Ghiaccio} = C_p \cdot m \cdot \Delta T = 0.486 \cdot 30.1 \cdot 8 = 117 \text{ cal}$$

$$q_{acq. Ghiaccio} = C_p \cdot m \cdot \Delta T = 2.03 \cdot 30.1 \cdot 8 = 489 \text{ Joule}$$

questo calore viene perso dalla bibita e la sua diminuzione di temperatura conseguente vale

$$\Delta T_1 = \frac{q_{acq. Ghiaccio}}{m_{bibita} \cdot C_{p_{bibita}}} = \frac{117 \text{ cal}}{340.2 \text{ g} \cdot 1 \text{ cal K}^{-1} \text{ g}^{-1}} = 0.34 \text{ K}$$

$$\Delta T_1 = \frac{q_{acq. Ghiaccio}}{m_{bibita} \cdot C_{p_{bibita}}} = \frac{489 \text{ J}}{340.2 \text{ g} \cdot 4.184 \text{ J K}^{-1} \text{ g}^{-1}} = 0.34 \text{ K}$$

Adesso la bibita presenta la temperatura

$$T_{bibita}(1) = T_{bibita}(0) - \Delta T_1 = 25 - 0.34 = 24.66^\circ \text{C}$$

Parte 2: La bibita cede ai cubetti di ghiaccio il calore necessario alla fusione (fusione del ghiaccio con perdita del calore di fusione ghiaccio da parte della bibita)

$$q_{acq. \text{ Ghiaccio}} = \Delta H_{\text{fusione}} \cdot n_{\text{moli}} = 1436 \text{ cal mol}^{-1} \cdot 1.67 \text{ mol} = 2398 \text{ cal}$$

Il calore di fusione viene ceduto dalla bibita che si raffredda abbassando la sua temperatura ancora di:

$$\Delta T_2 = \frac{q_{acq. \text{ Ghiaccio}}}{m_{\text{bibita}} \cdot C_{p_{\text{bibita}}}} = \frac{2398 \text{ cal}}{340.2 \text{ g} \cdot 1 \text{ cal K}^{-1} \text{ g}^{-1}} = 7.05 \text{ K}$$

Adesso la bibita presenta la temperatura

$$T_{\text{bibita}}(2) = T_{\text{bibita}}(1) - \Delta T_2 = 24.66 - 7.05 = 17.61^\circ \text{C}$$

Parte 3

Riscaldamento acqua (ex ghiaccio) e raffreddamento acqua (ex bibita) fino al raggiungimento della temperatura di equilibrio; come due corpi a differente temperatura posti a contatto

Il calore ceduto dal corpo più caldo viene acquistato dal corpo più freddo

$$q_{acq. \text{ exGhiaccio}} = -q_{ceduto. \text{ bibita}}$$

$$m_{\text{exGhiaccio}} \cdot C_{p_{\text{exGhiaccio}}} \cdot \Delta T_{\text{exGhiaccio}} = -m_{\text{bibita}} \cdot C_{p_{\text{bibita}}} \cdot \Delta T_{\text{bibita}}$$

Usualmente $\Delta T = (T_2 - T_1)$ con T_2 che indica la temperatura di equilibrio e T_1 quella iniziale. Indico con T_{eq} la temperatura finale di equilibrio e con T_{exGhi} e T_{bibita} rispettivamente le temperature iniziali dell'ex-ghiaccio e della bibita alla temperatura dopo la parte 2

$$m_{\text{exGhi}} \cdot C_{p_{\text{exGhi}}} \cdot (T_{\text{eq}} - T_{\text{exGhi}}) = m_{\text{bibita}} \cdot C_{p_{\text{bibita}}} \cdot (T_{\text{bibita}} - T_{\text{eq}})$$

considerando che la temperatura dell'acqua ex ghiaccio è zero $T_{\text{exGhi}} = 0$ e che la capacità termica specifica dell'acqua liquida si mantiene praticamente costante al valore di $1 \text{ cal K}^{-1} \text{ g}^{-1}$ (perchè esprimiamo la massa in grammi):

$$m_{\text{exGhi}} \cdot T_{\text{eq}} = m_{\text{bibita}} \cdot T_{\text{bibita}} - m_{\text{bibita}} \cdot T_{\text{eq}}$$

$$m_{\text{bibita}} \cdot T_{\text{eq}} + m_{\text{exGhi}} \cdot T_{\text{eq}} = m_{\text{bibita}} \cdot T_{\text{bibita}}$$

$$T_{\text{eq}} = \frac{m_{\text{bibita}} \cdot T_{\text{bibita}}}{m_{\text{bibita}} + m_{\text{exGhi}}} = \frac{340.2 \text{ g} \cdot 17.61^\circ \text{C}}{340.2 \text{ g} + 30.1 \text{ g}} = 16.18^\circ \text{C}$$

Se non si fosse fatta la semplificazione si sarebbe ottenuta la seguente espressione con più rischio di errore:

$$T_{\text{eq}} = \frac{m_{\text{bibita}} \cdot C_{p_{\text{bibita}}} \cdot T_{\text{bibita}} + m_{\text{exGhi}} \cdot C_{p_{\text{exGhi}}} \cdot T_{\text{exGhi}}}{m_{\text{bibita}} \cdot C_{p_{\text{bibita}}} + m_{\text{exGhi}} \cdot C_{p_{\text{exGhi}}}}$$

Applicando le semplificazioni si ritorna alla espressione finale già usata.